Disclaimer

Das folgende Basismodell für die Simulation des Kapitalmarkts wurde im Auftrag der Produktinformationsstelle Altersvorsorge (PIA) vom Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (Fraunhofer ITWM) zur Einordnung der steuerlich geförderten Altersvorsorge- und Basisrentenprodukte in die Chancen-Risiko-Klassen entwickelt. Die Verwendung dieses Modells ist nur für Zwecke der Berechnung der Effektivkosten gestattet.

Basismodell der Kapitalmarktsimulation

Die Basisprozesse des Kapitalmarktmodells bestehen aus der Modellierung der zeitlichen Entwicklung der Short-Rate (Kassazinsrate) und eines Aktienkurses.

A. Zinsdynamik

Zur Modellierung der Zinsdynamik wird ein verallgemeinertes Zwei-Faktor-Vasicek-Modell für die Entwicklung der risiko-neutralen Short-Rate

(1.1)
$$r^*(t) = x(t) + y(t) + \psi(t)$$

gewählt, wobei die x- und y-Prozesse die folgenden Darstellungen besitzen:

(1.2)
$$\begin{aligned} dx(t) &= -ax(t)dt + \sigma dZ_1(t),\ x(0) = 0, \\ dy(t) &= -by(t)dt + \eta\left(\rho^* dZ_1(t) + \sqrt{1-(\rho^*)^2}\, dZ_2(t)\right),\ y(0) = 0 \end{aligned}$$

Hierbei sind Z_1 und Z_2 unabhängige, eindimensionale Brownsche Bewegungen. Die Parameter a, b, σ, η, ρ^* werden jährlich aktualisiert und sind im Abschnitt D zu finden. Die deterministische Funktion

(1.3)
$$\psi(t) = f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1-e^{-at}\right)^2 + \frac{\eta^2}{2b^2}\left(1-e^{-bt}\right)^2 + \rho\frac{\sigma\eta}{ab}\left(1-e^{-at}\right)\left(1-e^{-bt}\right)$$

beinhaltet die (Pseudo-)Markt-Forward-Raten $f^M(0,t)$, die sich ergeben, wenn man die von der Bundesbank erzeugte Nelson-Siegel-Svensson-Kurve mit der Markt-Zinsstrukturkurve gleichsetzt. Die für die Simulationen zur Produktklassifizierung verwendeten Parameter der Nelson-Siegel-Svensson-Kurve werden ebenfalls jährlich aktualisiert, samt der hierbei verwendeten Modifikation der Funktion der Markt-Forward-Raten $f^M(0,t)$ und sind auch im Abschnitt D zu finden.

Da die Simulation von Kapitalmarktszenarien unter dem subjektiven Maß (also dem Maß, das die Bewegung der Kapitalmärkte beschreibt) zu erfolgen hat, ist eine zeitabhängige Risikoprämie zur risiko-neutralen Short-Rate zu addieren, so dass man die Form

(1.4) $$r(t) := r^*(t) + d_X \cdot \left(1 - e^{-at}\right) + d_Y \cdot \left(1 - e^{-bt}\right)$$

erhält, wobei die Parameter d_X und d_Y jährlich aktualisiert werden und wiederum im Abschnitt D zu finden sind.

Für die Verwendung bei der Simulation der Preise von Nullkuponanleihen erweist es sich als zweckmäßiger, die Risikoprämie auf die x- und y-Komponente zu verteilen und mit den modifizierten x- und y-Prozessen der Form

(1.5) $$x(t) := x(t) + d_X \cdot \left(1 - e^{-at}\right), \quad y(t) := y(t) + d_Y \cdot \left(1 - e^{-bt}\right)$$

zu rechnen. Mit dieser Form lässt sich die Entwicklung der Preise der Nullkuponanleihen zu dem Zeitpunkt t und der Fälligkeit T über die Zeit aus den Formeln

(1.6) $$P(t,T) = exp\left(-\int_t^T \psi(u)du - \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}x(t) - \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}y(t) + \frac{1}{2}V(t,T)\right),$$

(1.7) $$V(t,T) = \tfrac{\sigma^2}{a^2}\left[T - t + \tfrac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \tfrac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \tfrac{3}{2a}\right] + \tfrac{\eta^2}{b^2}\left[T - t + \tfrac{2}{b}e^{-b(T-t)} - \tfrac{1}{2b}e^{-2b(T-t)} - \tfrac{3}{2b}\right] + \\ +2\rho^* \tfrac{\sigma\eta}{ab}\left[T - t + \tfrac{e^{-a(T-t)}-1}{a} + \tfrac{e^{-b(T-t)}-1}{b} - \tfrac{e^{-(a+b)(T-t)}-1}{a+b}\right].$$

bestimmen (siehe Brigo, Mercurio (2001)).

B. Dynamik des Basis-Aktienkurses

Auf der Aktienseite ist ein verallgemeinertes Black-Scholes-Modell für die Modellierung der Preisentwicklung von Aktien/Aktienfonds/Aktienindizes

(1.8) $$S(t) = s_0 \exp\left(\int_0^t r(s)ds + \left(\lambda - 0{,}5\sigma_S^{\,2}\right)t + \sigma_S W(t)\right)$$

zu wählen, wobei die Brownsche Bewegung W(t) von den beiden Brownschen Bewegungen im Zinsmodell unabhängig ist, σ_S die Volatilität des Aktienkurses darstellt und λ die konstante Überrendite über die Short-Rate darstellt.

Es werden die Parameter

$$\lambda = 0{,}04 \quad \text{und} \quad \sigma_S = 0{,}2$$

gewählt.

Zur allgemeinen Modellierung der Preisentwicklung F(t) eines Aktienfonds/Index mit beliebiger Volatilität $\sigma \geq 0$ ist die Überrendite

(1.9) $$\lambda(\sigma) := \lambda \frac{\sigma}{\sigma_S}$$

zu wählen, so dass sich die Preisentwicklung gemäß

(1.10) $$F(t) = F_0 \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds + \left(\lambda \frac{\sigma}{\sigma_S} - 0{,}5\sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right)$$

ergibt.

C. Simulation der Basisprozesse und der abgeleiteten Prozesse

Zur Simulation der Basispfade ist prinzipiell monatlich zu diskretisieren (d.h. mit Schrittweite von Δ=1/12). Wird bei einem dynamischen Hybridprodukt täglich umgeschichtet, so ist es erlaubt, täglich zu diskretisieren (d.h. mit Schrittweite von Δ=1/360 bzw. gemäß der gewählten Tagekonvention).

Für die **Simulation der Entwicklung des Deckungsstocks** eines Lebensversicherers als eine wesentliche Zutat bei der Konstruktion von dynamischen Hybridprodukten benötigen wir

- die Duration d (gerundet auf die nächstliegende Dauer in Jahren) des Portfolios der festverzinslichen Anlagen des Lebensversicherers,

woraus sich dann mit der jeweils gültigen Swaprate K(t-i) für diese Duration zum Zeitpunkt t-i der durchschnittliche Kupon des Festzinsportfolios als

(1.11) $$R_{B,d}(t) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} K(t-i)$$

ergibt. Man beachte, dass Swapraten mit nicht-positivem Zeitindex bereits realisierte Werte sind, die sich aus der Vergangenheit ergeben. Zur Bestimmung der benötigten historischen Swapraten kann man die entsprechenden historischen Nelson-Siegel-Svensson-Kurven der Bundesbank verwenden und zwar immer die, die zu Jahresbeginn gültig waren. Die zugehörigen Zeitreihen heißen

BBK01.WT3201

BBK01.WT3202

BBK01.WT3203

BBK01.WT3204

BBK01.WT3205

BBK01.WT3206

Sie sind auf der Homepage der Bundesbank unter

http://www.bundesbank.de/Navigation/DE/Statistiken/Zeitreihen_Datenbanken/Makrooekonomische_Zeitreihen/its_details_value_node.html?tsId=BBK01.WT3201&listId=www_s140_it03c

zu finden.

Alternativ können die Anbieter die von ihnen in den jeweiligen Jahren erzielten Verzinsungen aus ihrer Anleihen-Anlage verwenden.

Allgemein erhält man die Swaprate K(t) der Duration d als

(1.12)
$$K(t)=\frac{1-P(t,t+d)}{\sum_{j=1}^{d}P(t,t+j)}.$$

Es sei F(t) der Wert der Anlagen im Deckungsstock zum Zeitpunkt t, die eher Fonds- bzw. Aktiencharakter haben. Für diesen Teil des Deckungsstocks sei eine Volatilität von σ gegeben. Die Entwicklung von F(t) wird dann wie in Abschnitt B modelliert.

Es seien nun ψ der prozentuale Anteil des Gesamtanlagebetrags, der heute (zum Zeitpunkt t=0) in Aktien bzw. Aktienfonds investiert ist und (1-ψ) entsprechend der Anteil in Anleihen. Wir modellieren dann als zur Verfügung stehende Rendite das geometrische Mittel der Renditen der letzten drei Jahre und verwenden als Basis für die für das Jahr t+1 zu deklarierende Gesamtverzinsung die Deckungsstockrendite von

(1.13)
$$R(t)=\sqrt[3]{\prod_{i=0}^{2}\left(\psi\frac{F(t-i)}{F(t-i-1)}+(1-\psi)\left(1+R_{B,d}(t-i)\right)\right)}-1.$$

Wir verwenden dann zur Simulation die für das Jahr t+1 deklarierte Gesamtverzinsung von

(1.14)
$$g(t+1)=H(0)+\left(0{,}9*\left(R(t)-K\right)-H(0)\right)^{+}$$

wobei H(0) der zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses gültige Höchstrechnungszins und K die (prozentualen) Kosten der Kapitalanlage sind. Dabei ergeben sich die Kosten der Kapitalanlage als

(1.15) $$K = \frac{Aufwendung\ Verwaltung\ Kapitalanlagen}{\frac{1}{2}\left(Summe\ Kapitalanlagen\ GJ + Summe\ Kapitalanlagen\ VJ\right)},$$

wobei mit GJ das aktuelle Geschäftsjahr und VJ das Vorjahr gemeint sind, wobei „aktuell“ das Geschäftsjahr bezeichnet, für das die letzte Bilanz vorliegt, aus der die obigen Angaben zu entnehmen sind.

Damit ist die Entwicklung des Deckungsstockvermögens als sichere Anlage im dynamischen Hybridprodukt jeweils für ein Jahr vollkommen beschrieben.

Für die Entwicklung des Vertragsvermögens einen dynamischen Hybridprodukts sind dann zusätzlich die Entwicklungen der beteiligten Fonds wie unter B beschrieben zu simulieren, wobei für einen Garantiefonds zusätzlich die jeweils vereinbarte untere Schranke zu berücksichtigen ist.

Die Aufteilung des vorhandenen Vertragsvermögens sowie der eingehenden Beiträge erfolgt gemäß dem Algorithmus, der bei der Tarifkalkulation zugrunde gelegt wird.

D. Anhang: Aktuelle Kapitalmarktparameter

Für das Aktienmodell wurden die Parameter Volatilität = 0,2 sowie Überrendite = 0,04 kalibriert.

Die Kalibrierung des Zinsmodells unterteilt sich in die Zinsstrukturkurve und die stochastischen Prozesse. Die Zinsstrukturkurve für die ersten 20 Jahre wird mit dem Nelson-Siegel-Svensson Verfahren parametrisiert. Die Parameter sind in Tabelle-1 aufgelistet. Für den weiteren Verlauf wird ein konstantes Zinsniveau von 1,297% verwendet, welches dem Zinssatz für 20-jährige Anleihen aus der Nelson-Siegel-Svensson Kurve entspricht.

Die Parameter der stochastischen Prozesse unter dem risikoneutralen Maß sind in Tabelle-2 dargestellt. In den Verfahren zur Chance-Risiko-Klassifizierung werden jedoch auch Zinsen unter dem physischen Maß benötigt. Die zusätzliche Drift in den Prozessen X und Y bezeichnen wir mit d_X bzw. d_Y.

Parameter	Wert
β_0	0,00044
β_1	-0,31131
β_2	30,00000
β_3	-26,98974
τ_1	7,42196
τ_2	6,17789

Tabelle-1: Svensson Parameter

Parameter	Wert
$\boldsymbol{a}$	0,40100
$\boldsymbol{b}$	0,17800
$\boldsymbol{\sigma}$	0,03780
$\boldsymbol{\eta}$	0,03720
$\boldsymbol{\rho^*}$	-0,99600
$\boldsymbol{d_X}$	0,00118
$\boldsymbol{d_Y}$	0,00346

Tabelle-2: Parameter Zwei-Faktor Zinsmodell

E. Referenzen

Brigo D., Mercurio F. (2001) Interest Rate Models: Theory and Practice, Springer.